每周工作汇报

姓名	侯宇轩	开始日期	2019.3.5	结束日期	2019.3.11

1. 本周任务与计划

1.1 研究任务

阅读蔡老师布置的论文：PDE-Net: Learning PDEs from Data，学习其中的方法，思考如何用其对 level-set 进行改进，来应用在神经纤维瘤分割上。

2. 本周工作概要

2.1 当前的进展

本周工作

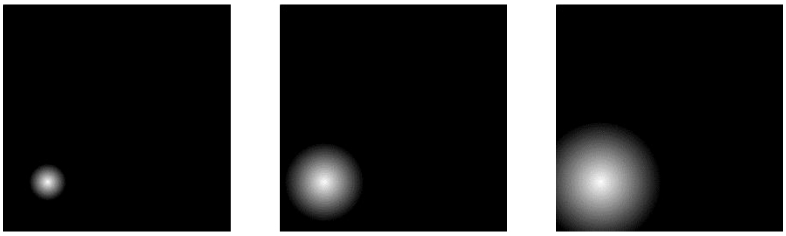
目标：使用 PDE-net 将 Level set 分割正圆的过程学习出来

将训练所用数据修改成为 signed distance function （以分割一个圆为例。函数即为距圆心的长度/圆的半径）

$$V = \frac{\mathrm{r_c} - \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}}{r_c}$$

这样可以保证圆周上的 speed=0（水平集扩散到圆周上即停止）圆内 speed 为正（向外），圆外 speed 为负（向内）。

将 signed distance function 的范围从圆内扩张到圆外



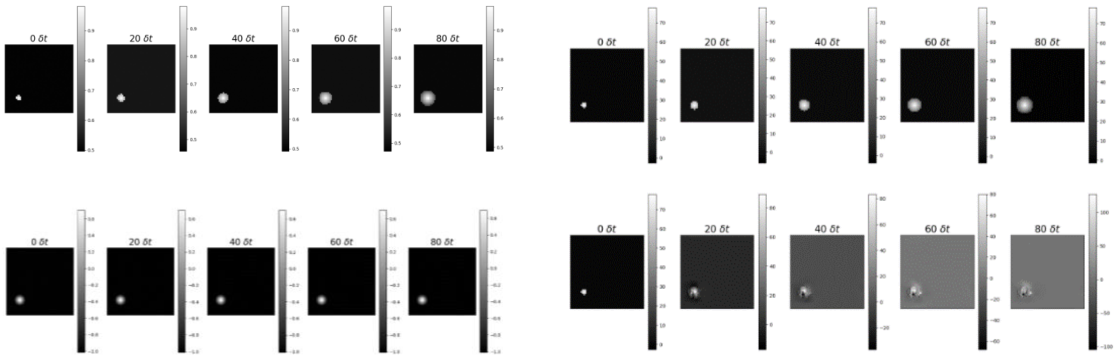
0 iters　　　50 iters　　　100 iters

上方的 xx iters 指的是 level set 的迭代步数，上方图片是对应步数生成的训练数据，最终将 150 步的训练数据输入 PDE-net 网络。

上周的代码已经可以抓取到圆形特征，但是存在演化慢、幅度小的问题。在蔡老师的指示下，调整原来 speed map 的结构，使得圆内速度值随着曲线演化而增大。

输入到 PDE-net 中的训练结果如下：

预测结果：



左上：正确结果（上周）　　　右上：正确结果（本次）

左下：上次预测结果　　　右下：本次预测结果

可以看到，类似恒等映射（更新速度过慢）的情况不再出现，边界区域慢慢扩大。不过与此同时，在区域内部数值上的稳定性有所下降。

此外，对蔡老师布置的文章

J.A. Sethian and Peter Smereka “Level Set Methods for Fluid Interfaces”

进行阅读。笔记如下：

Two-phase Flows

不混和

两种不可压缩流体.

使用不可压缩 Naiver-Stokes 方程 + level set 计算.

$$\rho_L \frac{D\vec{u}_L}{Dt} = -\nabla p_L + 2\mu_L \nabla\cdot D_L + \rho_L \vec{g}. \quad \nabla\cdot u_L = 0 \quad x\in \text{liquid}$$

$$\rho_g \frac{D\vec{u}_g}{Dt} = -\nabla p_g + 2\mu_g \nabla\cdot D_g + \rho_g \vec{g}. \quad \nabla\cdot u_g = 0 \quad x\in \text{gas} \qquad (15)$$

u为速度. p为压强. ρ为密度. μ为黏性

D为 the rate of deformation tensor

g为重力加速度.

界面上的边界条件为:

$$(2\mu_L D - 2\mu_g D)\cdot\vec{n} = (p_L - p_g + \sigma K)\vec{n} \quad \text{and} \quad \vec{u}_L = \vec{u}_g \quad x\in\Gamma$$

$\vec{n}$为法线从气→液. $K=\nabla\cdot\vec{n}$为界面曲率. σ为面张力系数.

令 $\vec{u} = \begin{cases} \vec{u}_L & x\in \text{liquid} \\ \vec{u}_g & x\in \text{gas} \end{cases}$ $\rho = \begin{cases} \rho_L & x\in \text{liquid} \\ \rho_g & x\in \text{gas} \end{cases}$

μ也相似的定义.

(15).(16) 可以写成如下:

~~$(2\mu_L D - 2\mu_g D)\cdot\vec{n} =$~~

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu D) - \sigma K\delta(d)\,\vec{n} + \rho g. \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0. \quad x\in\Omega. \qquad (17)$$

δ为 Dirac delta 函数. d为 signed distance function
从界面计算

5.1 Density weighted Divergence-free Projection

为了加强不可压缩条件. 引入 density-weighted 无散投影.

令 $\vec{f}_{(x)}$为 Ω上任一向量场.

投影 $\vec{u} = \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{f}$ (13). 在 ∂Ω上限定 $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

由于 $\nabla\cdot\vec{u} = 0$. p一定满足以下椭圆方程:

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = \nabla\cdot\vec{f}. \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \vec{f}\cdot\vec{n} \quad \text{在 } \partial\Omega. \qquad (19)$$

定义 P_ρ为投影函数.

~~[illegible]~~ $\vec{u} = P_\rho(\vec{f})$

有 $P_\rho(\frac{1}{\rho}\nabla\psi) = 0$. 当 ψ为任一数量场.

显然. 我们可以用此函数消除(17)中的压力项.

5.2 level set function

引入水平集函数 $\phi(\vec{x}, t)$. $\phi = 0$ 表示界面
$\phi < 0$ 气体
$\phi > 0$ 液体 (前面法线正向为气→液)

引入 Heaviside 函数

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < 0 \\ \frac{1}{2} & \phi = 0 \\ 1 & \phi > 0 \end{cases}$$

$\rho(\phi) = \rho_g + (\rho_L - \rho_g)H(\phi)$. / $\mu(\phi) = \mu_g + (\mu_L - \mu_g)H(\phi)$.

ϕ的运动由如下描述: $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\phi = 0$

5.3 Thick Interfaces

为了避免计算失败(界面上会有尖锐点难以计算). 引入 $\rho_\varepsilon(\phi)$

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi\phi/\varepsilon)\right] & |\phi| \le \varepsilon \\ 1 & \phi > \varepsilon \end{cases}$$

⇒ 这样 ~~使~~ 界面厚度约为 $\frac{2\varepsilon}{|\nabla\phi|}$

光滑后的 δ函数 $\delta_\varepsilon = \frac{dH_\varepsilon}{d\phi}$

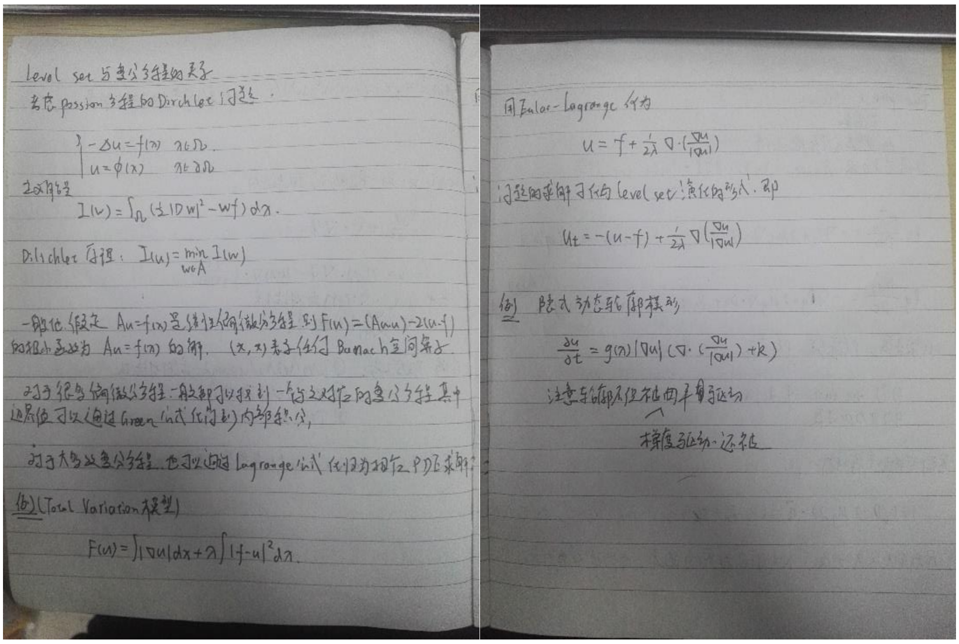
(17) 光滑后成为

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho_\varepsilon(\phi)}\left(-\nabla p + \nabla\cdot(2\mu_\varepsilon(\phi)D) - \sigma K\delta_\varepsilon(\phi)\nabla\phi\right) + \vec{g} \qquad (24)$$

要求界面有均一厚度. 那么需有 $|\phi| \le \varepsilon$ 时 $|\nabla\phi| = 1$. 界面附近的 signed distance function 是较好的选择.

同时，学习了 level set 与变分方程的关系。

笔记如下：



level set 与变分方程的关系

考虑 possion 方程的 Dirchlet 问题.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & x \in \Omega \\ u = \phi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

变分问题

$$I(w) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Dw|^2 - wf\right) dx.$$

Dirichlet 原理：$I(u) = \min_{w \in A} I(w)$

一般化 假定 $Au=f(x)$ 是线性偏微分方程 则 $F(u) = (Au,u) - 2(u,f)$ 的极小函数为 $Au=f(x)$ 的解. (x,x) 表示任何 Banach 空间乘子

对于很多偏微分方程一般都可以找到一个与之对应的变分方程 其中边界值可以通过 Green 公式化为内部积分,

对于大多数变分方程 也可以通过 Lagrange 公式化归为相应 PDE 求解;

例 (Total Variation 模型)

$$F(u) = \int |\nabla u| dx + \lambda \int |f-u|^2 dx.$$

用 Euler-Lagrange 化为

$$u = f + \frac{1}{2\lambda} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

问题的求解可化为 level set 演化的形式. 即

$$u_t = -(u-f) + \frac{1}{2\lambda} \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

例 隐式动态轮廓模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)|\nabla u| \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + k\right)$$

注意轮廓不仅由曲率驱动

梯度驱动、还由

经过以上学习，收获如下：

1. 对于二相不可压缩流体界面问题（实际上，图像的分割可以看做是零水平集即图像边界内外是不同的流体）

方程如下：

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu D) - \sigma\kappa\delta(d)\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{g}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, x \in \Omega$$

第一行为类 Navier-Stokes 运动方程，第二行为不可压缩条件。

为了数值求解的便利性，可以使用多种策略。如，使用窄带法，假设界面有一定厚度ϵ，且界面内部是同质性的。这样可以避免薄界面上可能的尖锐点带来的数值精度问题。亦或，我们可以使用投影法消除含 p 的项，转为一个只含 u 的常微分方程计算。

2.对于隐式动态轮廓模型，边界是由梯度项与曲率项同时驱动的。一般做法是使用迎风差分或 Hamilton-Jacobi ENO 等方法计算对流（梯度）项，中心差分求解曲率项，最后用 TVD Runge-Kutta 法求解整个微分方程。

3. 下周工作计划

调整 signed distance function 的大小，对流体与水平集关系继续研究。

附表：工作整理

任务类型	任务内容	截止日期	当前进度
工作	肝脏分割比赛 （浙一举办） 负责 registraion 部分	结束	对肝脏配准继续进行研究、调整。
工作	神经纤维瘤研究 （中期目标）		蔡老师提出新方法：使用偏微分方程网络 PDE-net 对 level set 进行改进。现在最重要的是找到网络能学习的合适训练数据。

本周工作时长：8 小时*5+ 3 小时*2 = 46 小时。